Ejercicio 1. Sea V el espacio vectorial R^3 y sean: $\vec{v}_1 = \big(1, 2, 1\big)$, $\vec{v}_2 = \big(1, 0, 2\big)$, $\vec{v}_3 = \big(1, 1, 0\big)$.
¿Los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ generan a V?

Què me dan?

*Los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ pertenecientes a R^3.

Què me piden?

*Verificar si los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ generan a R^3.

Plan

*Plantear y desarrollar el sistema de ecuaciones formado por la combinaciòn lineal de los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$.

Ejecuciòn

$$\alpha[1,2,1] + \beta[1,0,2] + \gamma[1,1,0] = [a, b, c]$$

a=$\alpha + \beta + \gamma$ $\quad \alpha = c - 2\beta$

b=$2\alpha + \gamma$ $\quad \gamma = b - 2\alpha = b - 2(c - 2\beta) = \beta - 2c + 4\beta$

c=$\alpha + 2\beta$ $\quad \beta = a - \alpha - \gamma = a - (c - 2\beta) - (b - 2c + 4\beta)$

Por lo tanto:

$$\beta = a - c + 2\beta - b + 2c - 4\beta \rightarrow a - c - 2\beta - b + 2c \rightarrow a - 2\beta - b + c \rightarrow 3\beta = a - b + c \rightarrow \beta = \frac{a - b + c}{3}$$

$$\alpha = c - 2\beta \rightarrow c - 2\left(\frac{a - b + c}{3}\right) \rightarrow \alpha + 2\left(\frac{a - b + c}{3}\right) = c \rightarrow \frac{a - b + c}{3} = \frac{c - \alpha}{2} \rightarrow 2a - 2b + 2c = 3c - 3\alpha \rightarrow$$
$$2a - 2b - c = -3\alpha \rightarrow \alpha = \frac{-2a + 2b + c}{3}$$

$$\gamma = b - 2\alpha \rightarrow b - 2\left(\frac{-2a + 2b + c}{3}\right) \rightarrow a\left(\frac{-2a + 2b + c}{3}\right) = b - \gamma \rightarrow \frac{-2a + 2b + c}{3} = \frac{b - \alpha}{2} \rightarrow$$
$$-4a + 4b + 2c = 3b - 3\gamma \rightarrow -4a + b + 2c = -3\gamma \rightarrow \gamma = \frac{4a - b - 2c}{3}$$

Respuesta: $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ generan $a\,V$.

Fuente: Algebra Lineal. Seccion 6.3, ejemplo 1, pagina 292.